

西南交通大学 2023-2024 学年第 (1) 学期半期考试试卷

课程代码 MATH000112 课程名称 线性代数 B 考试时间 90 分钟

题号	一	二	三	四	总成绩
得分					

注意: 本试卷共四大题, 14 小题

一、 选择题 (每题 5 分, 共 25 分)

1. 设矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}^*$ 是 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵, 则 $\mathbf{A}^*$ 的第 2 行第 1 列的元素为 ().

(A) -2 (B) -6 (C) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

2. 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ 为 n 阶方阵,

- (1) 若 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{0}$, 则 $\mathbf{A} = \mathbf{0}$;
 (2) 若 $\mathbf{ABC} = \mathbf{E}$, 则 $\mathbf{BCA} = \mathbf{E}$;
 (3) $|\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2| = |\mathbf{A} + \mathbf{B}||\mathbf{A} - \mathbf{B}|$;
 (4) 若 $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$, 且 $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$, 则 $|\mathbf{B}| = 0$.

上述命题中, 正确的命题是 ().

(A) (1)(2) (B) (2)(4) (C) (3)(4) (D) (1)(3)

3. 设 $\mathbf{A}$ 为 3 阶方阵, 将 $\mathbf{A}$ 的第 2 列加到第 1 列得 $\mathbf{B}$, 再交换 $\mathbf{B}$ 的第 2 行与第 3 行

得单位矩阵 $\mathbf{E}$, 设 $\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\mathbf{A} = ()$.

(A) $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ (B) $\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{P}_2$ (C) $\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1$ (D) $\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1}$

4. 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 都是 3 阶方阵且 $|\mathbf{A}| = 3, |\mathbf{B}| = 2$, 则分块矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 2\mathbf{A}^{-1} \\ \mathbf{AB} & 0 \end{pmatrix}$ 的行列式为 ().

- (A) 4 (B) -4 (C) 16 (D) -16

5. 已知齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x + y + z = 0 \\ \lambda x + 3y - z = 0 \\ -y + \lambda z = 0 \end{cases}$ 仅有零解, 则 ().

- (A) $\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq 1$ (B) $\lambda \neq 0$ 或 $\lambda \neq 1$ (C) $\lambda = 0$ (D) $\lambda = 1$

二、填空题 (每题 5 分, 共 15 分)

6. 设 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1$, 则 $\begin{vmatrix} 2a_{11} - 3a_{12} & 5a_{11} & a_{13} - a_{11} \\ 2a_{21} - 3a_{22} & 5a_{21} & a_{23} - a_{21} \\ 2a_{31} - 3a_{32} & 5a_{31} & a_{33} - a_{31} \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

7. 设 $\mathbf{A}$ 是 n 阶非零矩阵, $\mathbf{E}$ 为 n 阶单位矩阵, 若 $\mathbf{A}^3 = \mathbf{0}$, 则 $(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

8. 设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{E}$ 是 2 阶单位矩阵, 则 $(\mathbf{B} + 2\mathbf{E})^{-1}(\mathbf{B}^2 - 4\mathbf{E}) = \underline{\hspace{2cm}}.$

三、解答题 (共 54 分)

9. (10 分) 设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 4 & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, 计算

- (1) $2\mathbf{A} - \mathbf{B}$; (2) $\mathbf{AB}^T$; (3) $|\mathbf{AB}^T|$.

10. (12 分) 已知行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \end{vmatrix}$,

(1) 求 D 的第 4 行各元素的余子式之和 $M_{41} + M_{42} + M_{43} + M_{44}$;

(2) 求 D 的所有代数余子式之和 $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 A_{ij}$.

11. (10 分) 用初等行变换将下列矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 5 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ 化为行最简形,

并求出 $\mathbf{A}$ 的秩.

12. (10 分) 设 $\mathbf{A}, \mathbf{X}$ 都是 3 阶方阵, 满足 $\mathbf{A}^2 - \mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{E}$, 其中 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $\mathbf{X}$.

13. (12 分) 设 $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, 又设 $\mathbf{A}$ 是 3 阶方阵,

且满足 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}$, 求

(1) $f(\mathbf{\Lambda}) = \mathbf{\Lambda}^3 + 2\mathbf{\Lambda}^2 - 3\mathbf{\Lambda}$;

(2) $f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^3 + 2\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A}$.

四、证明题 (共 6 分)

14. 设 $\mathbf{A}$ 是 n 阶反对称方阵, n 是奇数, 证明: $|\mathbf{A}| = 0$.